INF1130 SESSION A07
DEVOIR 1

remise: vendredi le 19 octobre 2007 avant 16h00

Question 1 sur la logique propositionelle (20 points).

Le manuel d'entretien de votre nouveau gadget est spécialement mal écrit. Par exemple, on retrouve le texte suivant pour nous aider à diagnostiquer les *pannes de type 1*:

"Si le voyant est allumé, alors l'indicateur est défectueux ou la pile est à plat. Lorsque l'indicateur fonctionne et que la pile n'est pas à plat, le voyant est allumé."

Partie a (5 points)**.** Traduisez le texte ci-dessus à l'aide de la logique propositionelle, en spécifiant bien quelles sont les propositions élémentaires (atomiques).

Partie b (10 points)**.** Trouvez l'énoncé le plus simple possible qui est équivalent à celui que vous avez obtenu en la partie **a** de cette question pour diagnostiquer une panne de type 1.

Partie c (5 points)**.** Retraduisez en français votre nouvel énoncé.

Question 2 sur la logique des propositions quantifiées (30 points, 5 pour chaque partie).

Soit U, l'univers du discours, l'ensemble des animaux.
Soit $C(x)$ le prédicat que x est un chien (canin).
Soit $F(y)$ le prédicat que y est un chat (félin).
Soit $D(x,y)$ le prédicat que x déteste y.

Pour chacune des assertions suivantes, exprimez l'assertion sous la forme d'une proposition quantifiée et exprimez la négation de cette assertion d'abord sous forme d'une proposition quantifiée et puis comme une assertion en français. Vous êtes libre d'utiliser ou de ne pas utiliser l'opérateur tel que (barre verticale). Seul un prédicat peut être nié.

a. Tous les chiens détestent tous les chats.
b. Certains chiens détestent tous les chats.
c. Certains chiens détestent certains chats.
d. Il y a un chat que tous les chiens détestent.
e. Pour tout chat il y a un chien qui le déteste.
f . Pour tout chien il y a un chat qu'il déteste.

Question 3 sur les ensembles (20 points).

Dans une certaine école de musique il y a 64 étudiants dont 34 chantent, 30 jouent d'un instrument, 26 écrivent de la musique, 12 chantent et jouent, 10 chantent et écrivent, 8 jouent et écrivent, et 3 chantent et jouent et écrivent.

Partie a (6 points)**.** Combien y a-t-il d'étudiants sans aucun talent musical sauf pour critiquer la musique pour un journal local? Justifiez.

Partie b (4 points)**.** Combien de triplets ordonnés (x,y,z) y a-t-il tels que x chante et joue mais n'écrit pas, y chante et écrit mais ne joue pas et z écrit et joue mais ne chante pas? Justifiez.

Partie c (4 points)**.** On dit qu'un étudiant est un *spécialiste* s'il écrit mais ne joue pas ou s'il joue mais n'écrit pas. Combien y a-t-il d'étudiants qui sont soit des spécialistes mais pas des chanteurs, soit des chanteurs mais pas des spécialistes? Justifiez.

Partie d (6 points)**.** Le directeur de l'école cherche à former un orchestre de chambre parmi les étudiants qui jouent mais n'écrivent pas et ne chantent pas. Combien y a-t-il d'orchestres possibles avec au moins 1 joueur? Avec au moins 2? Avec au moins 3? Justifiez.

Question 4 sur les fonctions et l'arithmétique modulaire (20 points).

Soit $E=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ et soit $S=\{-1,0,1\}$.
Soit f la fonction de E vers S définie par $f(x) = -1$ si $x>0$, $f(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(0) = 0$.
Soit g la fonction de S vers E définie par $g(x) = (x \bmod 3) - 1$.

Pour chacune des fonctions f, g, fog, gof, où o veut dire la composition de deux fonctions:

Partie a (4 points)**.** Dessinez le diagramme de cette fonction.

Partie b (8 points)**.** Dites si la fonction est injective, si elle est surjective, si elle est bijective. Justifiez.

Partie c (4 points)**.** Si la fonction n'est pas surjective, donnez son image (étendue).

Partie d (4 points)**.** Si la fonction est bijective, dessinez le diagramme de son inverse (sa réciproque).

Question 5 sur les suites (15 points dont 9 pour la partie **a**).

Partie a. Évaluez les sommes suivantes: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(3i+2j)$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-j)$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}j$.

Partie b. Une suite géométrique a pour premier terme x, pour deuxième terme y et pour dernier terme z. En supposant que $x \neq y$, donnez une formule pour la somme de la suite en fonction de x, y et z.

Question 6 sur le comportement asymptotique des fonctions (20 points).

Partie a (10 points)**.** Pour chacune des fonctions suivantes, donnez le plus petit nombre réel n tel que la fonction est dans $O(x^n)$.

$f_1(x) = (x^3+2x)/(2x+1)$; $f_2(x)= (x^2+1)/(x+1)$; $f_3(x) = 2x^3+x^2\log_2(x)$; $f_4(x) = (\log(x))^2+\sqrt{x}$;
$f_5(x)= \sum_{i=1}^{x} i^2$.

Partie b (10 points)**.** Étant donné deux fonctions $f_i(x)$ et $f_j(x)$, on dit que $f_i(x)$ *croît moins vite* que $f_j(x)$ si $f_i(x)$ est dans $O(f_j(x))$ mais $f_j(x)$ n'est pas dans $O(f_i(x))$ et on dit que $f_i(x)$ et $f_j(x)$ *croissent à la même vitesse* si $f_i(x)$ est dans $O(f_j(x))$ et $f_j(x)$ est dans $O(f_i(x))$. Classez les fonctions de la partie **a** selon leur taux de croissance: si $f_i(x)$ croît moins vite que $f_j(x)$, alors écrivez $f_i(x)$ à gauche de $f_j(x)$ et si $f_i(x)$ et $f_j(x)$ croissent à la même vitesse, alors écrivez l'une au-dessous de l'autre. Par exemple, si $f_1(x)$ était x, $f_2(x)$ était $x+1$ et $f_3(x)$ était x^2, alors il faudrait écrire

f_1 f_3
f_2

Question 7 sur les séquences de la bioinformatique et les preuves (25 points).

Soit $x_1x_2...x_n$ et $y_1y_2...y_m$ deux séquences de lettres de l'alphabet $\{A,C,G,T\}$. Un *alignement* entre ces deux séquences est donné par deux séquences de la même longueur

$$a_1a_2...a_k$$
$$b_1b_2...b_k$$

de symboles de l'alphabet $\{A,C,G,T,_\}$, avec b_i écrit au-dessous de a_i pour tout i, tel que:

a) pour tout i, au moins un des deux symboles a_i et b_i doit être une lettre - c'est-à-dire, $\forall i\big((a_i \neq \text{'_'}) \vee (b_i \neq \text{'_'})\big)$.

b) si l'on efface les symboles '_' de la séquence $a_1a_2...a_k$ on obtient la séquence $x_1x_2...x_n$ et si l'on efface les symboles '_' de la séquence $b_1b_2...b_k$ on obtient la séquence $y_1y_2...y_m$.

Par exemple, voici un alignement des séquences *ACGTGA* et *ACTGGGA*:

A	C	_	G	T	G	_	_	A
A	_	C	-	T	G	G	G	A

Le *coût* de l'alignement

$$a_1a_2...a_k$$
$$b_1b_2...b_k$$

est le nombre de paires de symboles (a_i,b_i) tels que $a_i \neq b_i$. Dans l'exemple dessus $a_i \neq b_i$ pour $i = 2, 3, 4, 7$ et 8, donc le coût de cet alignement est 5.

Partie a (3 points)**.** Donnez des alignements de coût 3, 4 et 5 entre les séquences *AC* et *CGA*.

Partie b (4 points)**.** Trouvez un alignement entre *ACGTGA* et *ACTGGGA* de coût minimum.

Partie c (8 points)**.** Quel est le coût maximum d'un alignement entre $x_1x_2...x_n$ et $y_1y_2...y_m$ en fonction de n et de m? Justifiez votre réponse.

Partie d (10 points)**.** Démontrez qu'il existe un alignement de coût 0 entre $x_1x_2...x_n$ et $y_1y_2...y_m$ si et seulement si $n = m$ et $x_1x_2...x_n = y_1y_2...y_m$ (les séquences sont de la même longueur et pour tout i on a $x_i=y_i$). Notez qu'il faut démontrer deux énoncés:
a) si $n = m$ et $x_1x_2...x_n = y_1y_2...y_m$, alors il existe un alignement de coût 0 entre $x_1x_2...x_n$ et $y_1y_2...y_m$;
b) s'il existe un alignement de coût 0 entre $x_1x_2...x_n$ et $y_1y_2...y_m$, alors $n = m$ et $x_1x_2...x_n = y_1y_2...y_m$.